



TITLE:

拡散方程式系における空間的一様  
周期解の不安定化について(集団生  
物学の理論的研究,研究会報告)

AUTHOR(S):

森田, 善久

---

CITATION:

森田, 善久. 拡散方程式系における空間的一様周期解の不安定化につい  
て(集団生物学の理論的研究,研究会報告). 物性研究 1983, 40(1): 154-157

ISSUE DATE:

1983-04-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/90864>

RIGHT:

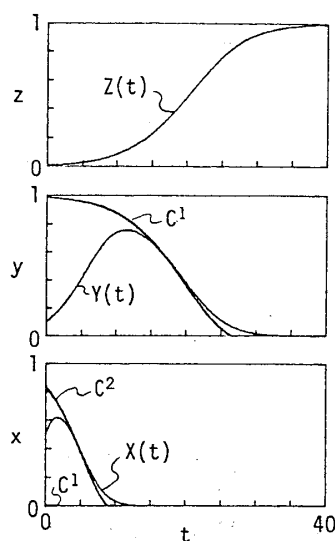


図 1

$Y(t), Z(t)$ )). ヤシャブシ林からクロマツ林, そしてタブ林へと移行していくのがわかる。種々の初期値から出発したシミュレーションの結果は,  $p_3 \ll p_2 \ll 1$  の場合と同様, 位相空間内に階層構造  $R^3 \supset S^2(\text{面}) \supset S^1(\text{線}) \supset S^0(\text{点})$  が存在することを示唆した。すなわち, どの初期点から出発しても, 状態点は, まず  $S^2$  に近づき, それに沿って  $S^1$  に, さらに  $S^1$  に沿って最終状態である点  $S^0$  に近づくように見える。

位相空間内に次の Inflector<sup>1)</sup>  $C^2, C^1, C^0$  を定義しよう。  
 ${}^t\mathbf{x} \equiv (x, y, z), {}^t\mathbf{F} \equiv (f, p_2g, p_3h), A \equiv \partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{x}$  とする ( ${}^t$  は転置を意味する)。  $A$  の固有値を  $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$  として,  $C^j$  を

$$C^0 = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{F} = 0 \},$$

$$C^1 = \{ \mathbf{x} \mid (A - \lambda_i I) \mathbf{F} = 0, i = 1, 2 \text{ or } 3 \},$$

$$C^2 = \{ \mathbf{x} \mid (A - \lambda_i I)(A - \lambda_j I) \mathbf{F} = 0, i, j = 1, 2 \text{ or } 3, i \neq j \}$$

で定義する。  $C^j$  は代数方程式で表わせる。

このとき, 上述の  $S^2, S^1, S^0$  はそれぞれ  $C^2, C^1, C^0$  の一部分で近似できることがわかった。  
 $C^2$  を  $x = u(y, z)$ ,  $C^1$  を  $x = v(z), y = w(z)$  として, 図 1 に  $C^2: x = u(Y(t), Z(t)), C^1: x = v(Z(t)), y = w(Z(t))$  が示されている。

#### 参考文献

- 1) M. Okuda, Prog. Theor. Phys. 68 (1982), 1827.

### 拡散方程式系における空間的一様周期解の不安定化について

京大・数理研 森田善久

§ 1)  $n$  種の生物が, ランダムな移動をしながら相互作用を及ぼし合う現象を表現するモデルとして, 次のような拡散方程式のシステムを取り上げよう。

$$(1) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(\mu, u), & t > 0, x \in \Omega, \\ \partial u / \partial n = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

ここで、 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  は滑らかな境界  $\partial\Omega$  を持つ有界領域で、境界条件は反射壁を表わす Neumann 条件を採用する。また、

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \quad d_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

$$f(\mu, u) = \begin{pmatrix} f^1(\mu, u_1, \dots, u_n) \\ \vdots \\ f^n(\mu, u_1, \dots, u_n) \end{pmatrix} \quad (f^i (i = 1, \dots, n) \text{ は十分滑らか}),$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

$\mu$  は外部要因等によって決まるパラメータとし、適当な変数交換によって、定数定常解が、0 定常解に移されているとする。すなわち

$$f(\mu, 0) = 0$$

を仮定する。

さて、次のような仮定を置こう。

A)  $D \equiv 0$  のとき、(1) は常微分方程式系になるが、パラメータ  $\mu$  が 0 を通り過ぎるとき、周期解が定数定常解  $u \equiv 0$  から分岐して、 $\mu$  について正の方向に表われる。(すなわち Hopf 分岐が右側に起こる。)

B) この周期解は空間変数  $x$  に依存しないので、任意の  $D$  と  $\Omega$  に対し、(1) の解にもなっているが、(1) の系で考えて  $\mu = 0$  の十分近くでは漸近安定であるとする。

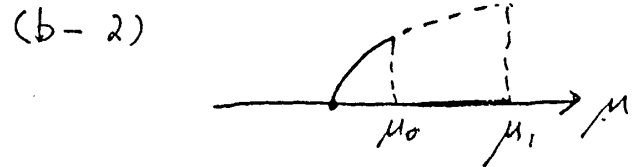
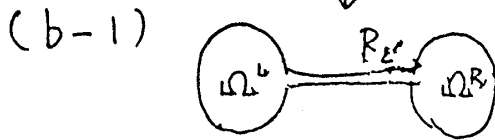
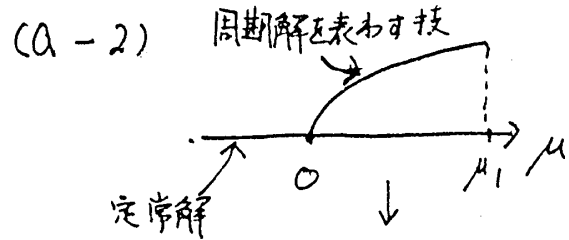
我々の関心は、この(1)の定常解から分岐する空間的一様周期解の安定性が、行列  $D$  (拡散係数を決める)、や領域  $\Omega$  の形状にどのように依存して変わるかを調べることにある。これについて次の結果が得られた。

#### [定 理]

1) 与えられた  $f$  に対し、 $D$  を適当な条件を満たすようにとることができるなら、十分小さい  $\mu$  に対応して  $d_i (i = 1, \dots, n)$  の比を変えずに、スケールだけを十分小さくとれば、空間的一様周期解は不安定化する。

2) 1) のような方程式系について,  $D$  を固定して, Neumann 条件のラプラシアン の第 2 固有値が 0 に近づくように, 領域を変形していくと, この周期解はやはり不安定化する。

2) について, 具体的な例をあげて, この定理の主張する内容をもう少し詳しく説明しよう。



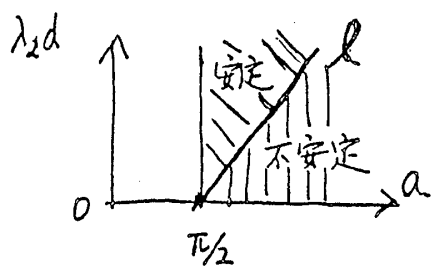
上の図の (a-1) の領域  $\Omega = \Omega^L \cup R_\epsilon \cup \Omega^R$  に対応する (a-2) の分岐ダイアグラムにおいて, 今  $\mu$  が 0 から  $\mu_1$  まで安定だったとする。領域のチューブの部分  $R_\epsilon$  の幅を小さくとした領域 (b-1) においては, 対応する分岐ダイアグラム (b-2) を見ると, 0 から  $\mu_0$  まではまだ安定であるが,  $\mu_0$  を越すともう不安定になっている。更に幅を細くすれば, 一層  $\mu$  に関する安定領域がせばまる。(こういう変形が, 定理の 2) の仮定を満たす変形であることはよく知られている。)

定理でいうところの条件 (十分条件) についての詳しい説明は省略することにするが (詳しくは文献 [4] を参照), 次の事に注意しておく。すなわち,  $d_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) の取り方は非常に本質的で, もし同じ値にとれば,  $\mu = 0$  の近傍では定理で述べたような不安定化は起こらない。

§ 2) 次に時間遅れの入った拡散方程式についても少し触れておきたい。

$$(2) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d \Delta u + a(1 - u(t-1))u(t), & t > 0, x \in \Omega, \\ \partial u / \partial n = 0, & x \in \partial \Omega, t > 0. \end{cases}$$

$d = 0$  のときは, Hutchinson が導入した, 振動現象を記述する単一種の個体群密度の増殖を表わす方程式である。(1) と比べると, (2) はスカラー値の方程式であるが, 遅れの効果により定常解  $u \equiv 1$  から,  $a = \frac{\pi}{2}$  のとき, 周期解が分岐することが知られている。しかもこの空間的一様周期解は, 最初安定に分岐する。ところが, 定理で述べたような不安定化が起こり, 次のような安定及び不安定領域を表わす, パラメータ領域が得られる。



拡散方程式系における空間的一様周期解の不安定化について図の曲線  $l$  は傾き  $\frac{2\pi}{3\pi-2}$  の直線で近似される。 $\lambda_2$  はラプラスianの第2固有値で、図は  $(a, \lambda_2 d) = (\frac{\pi}{2}, 0)$  の十分小さい近傍での図である。

最後に(1)と(2)の方程式の関連について、少し注意しておこう。(2)の代りに時間遅れの密度依存の効果を積分核で重みのつけた、次の方程式を考えよう。

$$(3) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + a(1 - \int_{-\infty}^t k(t-s)u(s)ds)u(t), & t > 0, x \in \Omega, \\ \partial u / \partial n = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0. \end{cases}$$

$$k(t) = K(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}), \quad K = \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha} \quad \text{と与えれば,}$$

適当な変換によって(3)は(1)の型の方程式に帰着される。この時、拡散係数を決める行列  $D$  は

$$D = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{で与えられる。すなわち(3)は一つの拡散係数が、かかっているだけだが、シス}$$

テムに直すと、一つだけを除いて残りを0と置いた場合と見なせるのである。この方程式についても、定理で述べたような不安定化が起こるが(文献[4])、§2の終わりで述べた注意となんら矛盾はしていない。

こうして、(3)を通して方程式(1)と(2)の関連について、およその直観が得られるであろう。

## 文 献

- 1) G. E. Hutchinson; Circular Causal Systems in Ecology, Ann. N. Y. Acad. Sci. **50** (1948), 221–246.
- 2) J. Lin and P. B. Kahn; Phase and Amplitude Instability in Delay-Diffusion Population Models, J. Math. Bio. **13** (1982), 383–393.
- 3) T. Erneux and M. Herschkowitz-Kaufman; Bifurcation Diagram of A Model Chemical Reaction -I, Stability Change of Time-Periodic solutions, Bull. Math. Bio. **41** (1979), 21–38.
- 4) Y. Morita; Destabilization of Periodic Solutions Arising in Delay-Diffusion Systems in Several Space Dimensions (preprint).